1 / 10

1	2	3	4
B	B	B	B

CALIF. Ap

APELLIDO Y NOMBRE: [redacted]

LIBRETA: [redacted]

TURNO PRÁCTICA: 14-17 19-22

Álgebra Lineal - 2do Cuatrimestre 2016
1er Parcial (8/10/2016)

1. Sean $S = \{p \in \mathbb{R}_3[X] : p'(1) = 0\}$ y $T = \langle X+3, X^3-X^2-X+1, X^3-3X+2\rangle \subseteq \mathbb{R}_3[X]$ subespacios de $\mathbb{R}_3[X]$. Hallar una transformación lineal $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ que cumpla las siguientes condiciones:
   - $\mathrm{Nu}(f) = S \cap T$,
   - $f(X^3 + X^2 + 1) = X - 3$,
   - $\mathbb{R}_3[X] = \mathrm{Nu}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

   Decidir si dicha transformación es única.

2. Sea S_n el subespacio de $\mathbb{R}^{n\times n}$ generado por las matrices de la forma $AB - BA$ con $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Para cada $n \geq 1$ hallar la dimensión de S_n y describirlo por ecuaciones.

3. Sea K un cuerpo y sean $T_1, T_2 \in (K^3)^*$ definidas por

$$T_1(x,y,z) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & z \end{pmatrix} \quad , \quad T_2(x,y,z) = \det\begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & y & 1 \\ 0 & z & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Probar que $\{T_1, T_2\}$ es linealmente independiente y completarlo a una base de $(K^3)^*$.

   (b) Hallar una base del subespacio $S \subseteq K^3$ tal que $S^\circ = \langle T_1, T_2\rangle$.

4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considerar la matriz

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{n\times n}.$$

   Hallar el rango de M_n en función de n.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

①

~~CALCULEMOS UNA BASE DE "S".~~

~~$ax^3+bx^2+cx+d \in S \Leftrightarrow 3a+2b+c=0 \Leftrightarrow P=ax^3+bx^2+(-3a-2b)x+d$~~

~~$\Leftrightarrow a.(x^3-3x)+b.(x^2-2x)+d$~~

~~ENTONCES~~

~~$S=\langle x^3-3x, x^2-2x, 1\rangle$~~

~~SON L.I. YA QUE TIENEN DISTINTO GRADO.~~

CALCULEMOS $S\cap T$,

$P\in S\cap T \Leftrightarrow P=a.(x+3)+b.(x^3-x^2-x+1)+c.(x^3-3x+2)$ Y $P'(1)=0$

$\Leftrightarrow \underline{a+b(3-2-1)+c.(3-3)=0} \Leftrightarrow a=0$
$P=a.(x+3)+\ldots$

$\Leftrightarrow P=b.(x^3-x^2-x+1)+c.(x^3-3x+2)$

ENTONCES

$S\cap T=\langle x^3-x^2-x+1, x^3-3x+2\rangle$ ✓

ENCONTRAREMOS DOS FUNCIONES LINEALES f_1 Y f_2 QUE CUMPLEN LO PEDIDO

$f_1(x^3-x^2-x+1)=0$	$f_2(x^3-x^2-x+1)=0$
$f_1(x^3-3x+2)=0$	$f_2(x^3-3x+2)=0$
$f_1(x^3+x^2+1)=x-3$	$f_2(x^3+x^2+1)=x-3$
$f_1(x^2)=x^2$	$f_2(x^2)=-x^2$

[redacted]

SI VEMOS QUE $B = \{x^3 - x^2 - x + 1, x^3 - 3x + 2, x^3 + x^2 + 1, x^2\}$ SON L.I, ENTONCES SERAN BASE DE $\mathbb{R}_3[x]$ (YA QUE $\dim \langle B \rangle = \dim \mathbb{R}_3[x] = 4$ Y $\langle B \rangle \subseteq \mathbb{R}_3[x]$) Y f_1 Y f_2 QUEDARÁN BIEN DEFINIDAS POR DICHAS CONDICIONES. REPRESENTANDO A B A MODO VECTORIAL (PARA LAS CUENTAS QUE VAMOS A HACER NO CAMBIA) EN LA BASE $B' = \{x^3, x^2, x, 1\}$ VEREMOS QUE SUS COORDENADAS SON LI Y POR ENDE B ES L.I.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

LUEGO LOS ELEMENTOS DE B EN COORDENADAS DE B' SON L.I Y POR LO TANTO B ES L.I Y ENTONCES ES BASE DE $\mathbb{R}_3[x]$

a)

VEAMOS QUE SE CUMPLE LA PRIMERA CONDICION. ES CLARA LA CONTENCION

$$S \cap T \subseteq Nu(f_1)$$

POR COMO FUERON DEFINIDAS f_1 Y f_2. VEAMOS LA OTRA CONTENCIÓN (LO HAREMOS CON f_1, ES ANÁLOGO PARA f_2) SUPONGAMOS QUE EXISTE $v \in Nu\, f$ tq $v \notin S \cap T$. $v = a.(x^3 - x^2 - x + 1) + b.(x^3 - 3x + 2) + c.(x^3 + x^2 + 1) + d x^2$ ~~EVALUANDO~~ CON $c \neq 0$ ó $d \neq 0$ (DE LO CONTRARIO $v \in S \cap T$). APLICANDO f_1

$$0 = f(v) = c \cdot f(x^3 + x^2 + 1) + d \cdot f(x^2) = c.(x-3) + d.(x^2)$$

COMO $\{x^2, x-3\}$ SON L.I (POR TENER DISTINTO GRADO) ENTONCES

$$c.(x-3) + d.x^2 = 0 \Rightarrow c = d = 0 \text{ Abs!}$$

HABIAMOS DICHO QUE $c \neq 0$ ó $d \neq 0$. LUEGO $Nu(f) \subseteq S \cap T$ Y POR ENDE $Nu(f) = S \cap T$

3/10

[redacted] PAG 2

b)

ES CLARO QUE EN AMBOS CASOS SE CUMPLE LA SEGUNDA CONDICIÓN POR COMO FUERON DEFINIDOS F_1 Y F_2

c)

VEAMOS QUE $Nu(F) + Im(F) = \mathbb{R}_3[x]$. SABEMOS QUE

$$Nu(F_1) = Nu(F_2) = \langle x^3 - x^2 - x + 1,\ x^3 - 3x + 2 \rangle$$

$$Im(F_1) = \langle x-3,\ x^2 \rangle \qquad Im(F_2) = \langle x-3,\ -x^2 \rangle$$

LUEGO

$$Nu(F_1) + Im(F_1) = \langle x^3 - x^2 - x + 1,\ x^3 - 3x + 2,\ x^2,\ x-3 \rangle$$

VEAMOS QUE SON L.I DE FORMA SIMILAR A COMO SE HIZO ANTES

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & & & \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

LUEGO $\dim(Nu(F_1) + Im(F_1)) = 4 = \dim \mathbb{R}_3[x]$ Y COMO $Nu(F_1) + Im(F_1) \subseteq \mathbb{R}_3[x]$

ENTONCES $Nu(F_1) + Im(F_1) = \mathbb{R}_3[x]$

ANALOGAMENTE $Nu(F_2) + Im(F_2) = \mathbb{R}_3[x]$

VEAMOS QUE ESTAN EN SUMA DIRECTA CON TEOREMA DE LA DIMENCION

$$\dim(Nu(F_{1,2}) \cap Im(F_{1,2})) = \dim Nu(F_{1,2}) + \dim Im(F_{1,2}) - \dim(Nu(F_{1,2}) + Im(F_{1,2}))$$

$$= 2 + 2 - 4$$

$$= 0$$

ENTONCES $Nu(F_{1,2}) \cap Im(F_{1,2}) = \{0\}$ Y FINALMENTE SE CUMPLE LA ULTIMA CONDICIÓN

$$Nu(F_1) \oplus Im(F_1) = \mathbb{R}_3[x] \qquad Nu(F_2) + Im(F_2) = \mathbb{R}_3[x]$$

4/10

[redacted]

(2)

VEAMOS QUE $B=\{E^{ij} : i\neq j\} \cup \{E^{ii}-E^{11}\ i\neq 1\}$ ES BASE DE "S_m".

VEAMOS PRIMERO LA INCLUCIÓN

$\langle B\rangle \subseteq S_m$

SEA E^{ij} CON $i\neq j$ PODEMOS ESCRIBIR

$$E^{ij}=E^{ik}\cdot E^{kj}-E^{kj}\cdot E^{ik} \quad \text{CON } k\in\{1,\dots,m\}$$

YA QUE $E^{ik}\cdot E^{kj}=E^{ij}$ YA QUE $k=k$ Y $E^{kj}\cdot E^{ik}=0$ YA QUE $i\neq j$. ASÍ $E^{ij}\in S_m$ CON $i\neq j$. SEA $E^{ii}-E^{11}$ CON $i\neq 1$ PODEMOS ESCRIBIR

$$E^{ii}-E^{11}=E^{i1}\cdot E^{1i}-E^{1i}\cdot E^{i1}$$

YA QUE $E^{i1}\cdot E^{1i}=E^{ii}$ Y $E^{1i}\cdot E^{i1}=E^{11}$, ENTONCES $E^{ii}-E^{11}\in S_m$

ASÍ $B\subseteq S_m$ Y POR LO TANTO (COMO S_m ES UN SUBESPACIO) CUALQUIER COMBINACIÓN LINEAL DE ELEMENTOS DE B PERTENECE A S_m, ES DECIR, $\langle B\rangle\subseteq S_m$.

VEAMOS QUE B ES L.I. SABIENDO QUE

$$D=\sum_{\substack{1\le i,j\le m\\ i\neq j}} c_{ij}\cdot E^{ij} + \sum_{1\le i\le m} d_{i}(E^{ii}-E^{11})=0$$

QUEREMOS VER QUE $c_{ij}=0\ \forall i\neq j$ Y $d_i=0\ \forall i$. CALCULANDO EL r,s-AVO COMPONENTE DE "D"

$$(D)_{rs}=\sum_{\substack{1\le i,j\le m\\ i\neq j}} c_{ij}(E^{ij})_{rs}+\sum_{1<i\le m} d_i\left[(E^{ii})_{rs}-(E^{11})_{rs}\right]$$

SI SUPONEMOS $r \neq s$ ENTONCES $(E^{ii})_{r,s} = 0 \ \forall i \Rightarrow (E^{ii})_{r,s} - (E^{11})_{r,s} = 0 \ \forall i$

Y $(E^{ij})_{rs} \neq 0 \Leftrightarrow (i,j) = (r,s)$ Y $E^{rs} = 1$ ENTONCES, SACANDO TODOS LOS

TERMINOS NULOS

$(D)_{rs} = c_{r,s} \cdot E^{rs} = c_{r,s}$

Y COMO $D = 0 \Rightarrow c_{rs} = 0 \quad \forall r \neq s$. SE $r = s \neq 1$ ENTONCES $(E^{ij})_{s,s} = 0 \ \forall i \neq j$

Y $(E^{11})_{s,s} = 0$ Y $(E^{ii})_{s,s} \neq 0 \Leftrightarrow i = s$. ASÍ OBTENEMOS

$$0 = (D)_{ss} = \sum_{1 \leq i \leq m} d_i \cdot [(E^{ii})_{s,s} - (E^{11})_{s,s}] = \sum_{1 \leq i \leq m} d_i (E^{ii})_{ss} = d_s \cdot (E^{ss})_{ss} = d_s$$

ENTONCES $d_s = 0 \quad \forall s \neq 1$. ~~SE $s = r = 1$, $(E^{ij})_{11} = 0 \ \forall i \neq j$, $(E^{ii})_{11} = 0 \ \forall i \neq 1$~~

~~$(E^{11})_{11} = 1$~~

$$\cancel{0 = (D)_{11} = \sum_{1 \leq i \leq m} d_i [(E^{ii})_{11} - (E^{11})_{11}] =}$$

$$\cancel{0 = (D)_{11} = d_1 \cdot [E}$$

FINALMENTE, B ES LI. CALCULEMOS $\dim \langle B \rangle$, ES DECIR, $\# B$.

$\# \{E^{ij} : i \neq j\} = \# \{E^{ij}\} - \# \{E^{ii}\} = m^2 - m$

$\# \{E^{ii} - E^{11} : i \neq 1\} = m - 1$

$\# B = \# \{E^{ij} : i \neq j\} + \# \{E^{ii} - E^{11} : i \neq 1\} = m^2 - m + m - 1 = m^2 - 1$

ENTONCES $\dim \langle B \rangle = m^2 - 1$. VEAMOS AHORA QUE $\dim S_n < m^2$, ES DECIR, QUE $\exists\, C \in \mathbb{R}^{m \times m}$ tq $\nexists A, B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ tq $C = A \cdot B - B \cdot A$. SI ESTO NO FUESE CIERTO ENTONCES $\forall C \in \mathbb{R}^{m \times m}$ $\exists A, B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ tq $C = A \cdot B - B \cdot A$ PERO ENTONCES

5/10

[redacted] PAG 4

~~SI TOMAMOS E^{11}, VEAMOS QUE $E^{11} \notin S_m$~~

$tr(C) = tr(A\cdot B - B\cdot A) = tr(A\cdot B) - tr(B\cdot A) = tr(A\cdot B) - tr(A\cdot B) = 0 \quad \forall C \in \mathbb{R}^{m\times m}$

ENTONCES $tr = 0$ Y SABEMOS QUE ESTO NO ES CIERTO, ABSURDO. ASÍ

~~$\dim S < m^2$~~ $S_m \subseteq \mathbb{R}^{m\times m}$ PERO $S_m \neq \mathbb{R}^{m\times m}$, ES DECIR, $\dim S < \dim(\mathbb{R}^{m\times m}) = m^2$

AL MISMO TIEMPO $\langle B\rangle \subseteq S_m$ Y COMO $\dim\langle B\rangle = m^2-1$

$\dim\langle B\rangle \le \dim S_m \Rightarrow m^2-1 \le \dim S_m < m^2 \Rightarrow \boxed{\dim S_m = m^2-1}$

PARA DESCRIBIRLO CON ECUACIONES BASTA CON CALCULAR SU ANULADOR.

POR TEOREMAS DE LA DIMENSIÓN

$\dim S_m^0 = \dim \mathbb{R}^{m\times m} - \dim S = m^2-(m^2-1) = 1$

BASTA ENTONCES CON ENCONTRAR UN ELEMENTO NO NULO DE S_m^0. VEAMOS

QUE $tr \in S_m^0$ .. q.v.q. $tr(C) = 0 \ \forall C \in S_m$

$C \in S_m \Rightarrow \exists A,B$ tq $C = AB - BA \Rightarrow tr(C) = tr(A\cdot B) - tr(B\cdot A) = tr(A\cdot B) - tr(A\cdot B) = 0$

LUEGO

$S_m^0 = \langle tr\rangle$

PODEMOS EXPRESAR A LA traza EN LA BASE DUAL CANÓNICA

$tr = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{mm}$

LUEGO, $S_m = {}^0\langle tr\rangle = Nu(tr) = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times m} : a_{11}+a_{22}+\dots+a_{mm} = 0\}$ ✓

6/10

[redacted] PAG 5

③

a) QUEREMOS VER QUE, SEAN $a, b \in K$

$a T_1 + b T_2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$

Y LO PROBAMOS DE LA SIGUIENTE MANERA

$a \cdot T_1 + b \cdot T_2 = 0 \Rightarrow a \cdot T_1(x,y,z) + b \cdot T_2(x,y,z) = 0 \quad \forall (x,y,z) \in K^3$

EN ~~LA~~ PARTICULAR, TOMANDO $(x,y,z) = (1,0,1)$, ES CLARO QUE $T_1(1,0,1) = 0$

YA QUE HAY UNA COLUMNA REPETIDA Y

$$T_2(1,0,1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

ENTONCES

$0 = a \cdot T_1(1,0,1) + b T_2(1,0,1) = -b \Rightarrow b = 0$ (YA QUE $-1 \neq 0$)

TOMANDO $(x,y,z) = (1,0,0)$

$$T_1(1,0,0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

LUEGO

$0 = a \cdot T(1,0,0) = a \Rightarrow a = 0$

ASÍ $a = b = 0$, QUE ES LO QUE QUERÍAMOS VER. TOMEMOS ✓

$$T_3(x,y,z) = \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & y & 0 \\ 1 & z & 0 \end{vmatrix}$$

VEAMOS QUE $\{T_1, T_2, T_3\}$ SON L.I.

$a, b, c \in k$

$$a \cdot T_1(x,y,z) + b \cdot T_2(x,y,z) + c \cdot T_3(x,y,z) = 0 \qquad \forall (x,y,z) \in k^3$$

EVALUANDO EN $(x,y,z) = (1,0,1)$, ES CLARO QUE $T_1(1,0,1) = T_3(1,0,1) = 0$ YA QUE SE REPITE UNA COLUMNA. YA CALCULAMOS QUE $T_2(1,0,1) = -1$ ENTONCES

$$0 = a \cdot T_1(1,0,1) + b \cdot T_2(1,0,1) + c \cdot T_3(1,0,1) = -b \Rightarrow b = 0$$

EVALUANDO EN $(x,y,z) = (1,0,0)$ ES CLARO QUE $T_3(1,0,0) = 0$ PORQUE HAY UNA COLUMNA REPETIDA Y YA VIMOS QUE $T_1(1,0,0) = 1$ ENTONCES

$$0 = a \cdot T_1(1,0,0) + c \cdot T_3(1,0,1) = a \Rightarrow a = 0$$

FINALMENTE TOMAMOS $(x,y,z) = (1,1,1)$

$$T_3(1,1,1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

LUEGO

$$0 = c \cdot T_3(1,1,1) = -c \Rightarrow c = 0$$

ENTONCES $\{T_1, T_2, T_3\}$ SON l.i Y COMO $\langle T_1, T_2, T_3 \rangle \subseteq (k^3)^*$ Y $\dim \langle T_1, T_2, T_3 \rangle = 3 = \dim (k^3)^*$

ENTONCES $\langle T_1, T_2, T_3 \rangle = k_3^*$ Y COMO SON l.i, SON UNA BASE (SON L.I Y GENERAN EL ESPACIO VECTORIAL)

b)

POR TEOREMAS DE LA DIMENSIÓN (ESTAMOS EN UN ESPACIO VECTORIAL FINITO)

$$\dim S = \dim(k^3) - \dim S^\circ = 3 - 2 = 1$$

(USAMOS QUE $\{T_1, T_2\}$ SON l.i)

7/10

[redacted]

COMO S ES UN SUBESPACIO (Y ESTAMOS EN DIMENSIÓN FINITA)

TENEMOS QUE

$$S = {}^{\circ}\langle T_1, T_2 \rangle$$

BASTA ENTONCES CON ENCONTRAR UN ELEMENTO NO NULO DE ${}^{\circ}\langle T_1, T_2 \rangle$ (YA QUE $\dim S = 1$). COMO ${}^{\circ}\langle T_1, T_2 \rangle = Nu(T_1) \cap Nu(T_2)$

VEAMOS QUE $(1,1,1) \in Nu(T_1) \cap Nu(T_2)$, ES DECIR, $T_1(1,1,1) = T_2(1,1,1) = 0$

ES CLARO QUE $T(1,1,1) = 0$ YA QUE HAY UNA COLUMNA REPETIDA. POR

OTRO LADO

$$T_2(1,1,1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ASÍ $(1,1,1) \in Nu(T_1) \cap Nu(T_2) = {}^{\circ}\langle T_1, T_2 \rangle = S$ Y $(1,1,1) \neq 0$ (YA QUE $1 \neq 0$)

ENTONCES VEMOS QUE $\boxed{\{(1,1,1)\}}$ ES UNA BASE DE S. ES CLARO QUE ES L.I (YA QUE ES UN SOLO ELEMENTO NO NULO) Y ES FÁCIL VER QUE GENERA YA QUE $\langle (1,1,1) \rangle \subseteq S$ y $\dim \langle (1,1,1) \rangle = 1 = \dim S$.

8/10

[redacted]

(4)

CALCULEMOS EL DETERMINANTE $|M_m|$ ~~EL RANGO~~

TRIANGULAMOS POR COLUMNAS DE LA SIGUIENTE FORMA ~~NO SE~~ (EL DETERMINANTE NO SE ALTERA)

$Col_m - Col_{m-1} \to Col_m, \ldots, Col_2 - Col_1 \to Col_2$

$$|M_m| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

HACIENDO DESARROLLO POR LA PRIMER FILA OBTENEMOS

$$|M_m| = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \Big]\ m-1 \text{ FILAS}$$

TRIANGULANDO POR FILAS, $F_m - F_{m-1} \to F_m, \ldots, F_2 - F_1 \to F_1\ F_2$

$$|M_m| = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

DESARROLLANDO POR LA PRIMERA COLUMNA

$$|M_m| = -\underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}_{B_{m-2}} \Bigg\} \; m-2 \text{ FILAS}$$

CALCULEMOS EL DETERMINANTE DE B_m (SABEMOS QUE $|M_m| = -|B_{m-2}| \; \forall m>2$)

DESARROLLANDO POR LA PRIMER FILA

$$|B_m| = -2 \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}_{B_{m-1}} - \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}_{H_{m-1}}$$

columna

CALCULEMOS $|H_m|$ DESARROLLANDO POR LA PRIMERA FILA

$$|H_m| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = |B_{m-1}| \quad \checkmark$$

Y COMO ~~$|B_m| = |B_{m-1}|$~~ $|B_m| = -2|B_{m-1}| - |H_{m-1}| = -2|B_{m-1}| - |B_{m-2}|$

$\forall m > 2$ Y CALCULANDO LOS VALORES INICIALES DE $|B_m|$

$$|B_1| = |-2| = -2 \quad , \quad |B_2| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2).(-2) - 1.1 = 3$$

PODEMOS DEMOSTRAR POR INDUCCION QUE

$$|B_m| = (-1)^m \cdot (m+1) \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

ES CLARO QUE VALE PARA $m=1$ Y $m=2$ COMO YA MOSTRAMOS. SUPONIENDO QUE SE CUMPLE PARA CIERTO "m" Y PARA "$m-1$", VEAMOS QUE TAMBIEN SE CUMPLE PARA "$m+1$"

$$|B_{m+1}| \underset{\substack{\text{FORMULA} \\ \text{DESCUBIERTA}}}{=} -2|B_m| - |B_{m-1}| \underset{\substack{\text{HIPOTESIS} \\ \text{INDUCTIVA}}}{=} -2.(-1)^m.(m+1) - (-1)^{m-1}.m$$

$$= (-1)^m.[-2.(m+1) + m] = (-1)^m (-2m-2+m) = (-1)^m.(-m-2) = (-1)^{m+1}.(m+2)$$

QUE ES LO QUE QUERIAMOS VER. LUEGO

$$|M_m| = -|B_{m-2}| = (-1)^{m-1}.(m-1) \quad \forall m > 2$$

~~OBSERVEMOS QUE $m>2 \Rightarrow m-1>1>0 \Rightarrow (-1)^{m-1}.(m-1) \neq 0$~~

POR LO TANTO $|M_m| \neq 0$ Y POR LO TANTO M_m ES INVERSIBLE

POR LO QUE $rg(M_m) = m \quad \forall m > 2$. EN PARTICULAR PARA $m=1$ Y $m=2$

$M_1 = (0)$, $|M_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

~~POR LO TANTO $rg(M_2)=2$ Y ES CLARO QUE $rg(M_1)=0$~~

$$\cancel{\boxed{rg(M_m) = \begin{cases} m & \text{si } m>1 \\ 0 & \text{si } m=1 \end{cases}}}$$

SI $m \not\equiv 1$ (3) ENTONCES $m-1 \not\equiv 0$ (3) $\Rightarrow (-1)^{m-1} \cdot (m-1) \not\equiv 0$ (3).

ENTONCES, SI $m \not\equiv 1 (3)$ TENDREMOS QUE $|M_m| \neq 0$ Y POR LO TANTO M_m SERÁ INVERSIBLE POR LO QUE TENDREMOS $rg(M_m) = m$

$$m \equiv 0 \ (3) \Rightarrow rg(M_m) = m$$

$$m \equiv 2 \ (3) \Rightarrow rg(M_m) = m$$

VEAMOS QUE SUCEDE CON $m \equiv 1 (3)$, PODEMOS ESCRIBIR $m = 3k+1$ CON $k \in \mathbb{Z}$. SE PUEDE OBSERVAR QUE LA ULTIMA COLUMNA DE M_m SE PUEDE ESCRIBIR COMO COMBINACIÓN LINEAL DE LAS OTRAS

$$col_1(M_m) + col_2(M_m) + \cdots + col_{3k}(M_m) = (3k-1, 3k-1, \ldots, 3k-1, -1, -1, \ldots, -1, 0)$$
$$= -col_{3k+1}(M_m)$$

ENTONCES

$$-col_1(M_m) - \cdots - col_{3k}(M_m) = col_{3k+1}(M_m)$$

POR LO TANTO EL RANGO NO SE ALTERA SI SACAMOS LA ULTIMA COLUMNA

$$rg(M_m) = rg\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

10/10

[redacted] PAG 9

TAMBIÉN PODEMOS OBSERVAR LO MISMO CON LA ÚLTIMA FILA

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_{3k} = (3k-1, 3k-1, \ldots, 3k-1) = (-1, -1, \ldots, -1) = -F_{3k+1}$$

POR LO TANTO EL RANGO NO SE ALTERA SI SACAMOS LA ÚLTIMA FILA $(-F_1 - F_2 - \cdots - F_{3k} = F_{3k+1})$

$$rg(M_m) = rg\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = rg(M_{3k}) = 3k = m-1$$

YA QUE $3k \equiv 0 \ (3)$ (YA HABÍAMOS PROBADO ESE CASO) FINALMENTE

$$\boxed{rg(M_m) = \begin{cases} m & si \ m \not\equiv 1 \ (3) \\ m-1 & si \ m \equiv 1 \ (3) \end{cases}} \quad \forall m > 2$$

¿Por qué? FALTÓ CONSIDERAR LOS CASOS $m=1$ Y $m=2$. $M_1 = (0)$ POR LO QUE ES CLARO QUE $rg(M_1) = 0$. $|M_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rg(M_2) = 2$, VEMOS QUE EN ESTOS CASOS SIGUE VALIENDO LA FÓRMULA POR LO QUE VALE PARA TODO $m \in \mathbb{N}$